ANALISI II ING. INFORMATICA 2022-2023 (591AA) - APPELLO ESTIVO I

09/06/2023

Nome e cognome:____

Matricola:____

Durata: 2 ore. Nessun materiale è consultabile.
Nessun device deve essere usato.

Esercizio 1.

(a) Calcolare il lavoro del campo vettoriale $F(x, y) = (y, x)$ lungo la curva $\gamma(t) = (t, t^3)$ con $t \in [0, 1]$.

(b) Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 4y + 4}, \frac{y - 2}{x^2 + y^2 - 4y + 4} \right)$$

è definito e C^1. Stabilire se F è conservativo nel dominio trovato.

Esercizio 2.

(a) Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto e $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una funzione. Dare la definizione di punto di minimo relativo per f.

(b) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + xy.$$

Trovare tutti i massimi e i minimi relativi, ed eventuali punti di sella.

Esercizio 3.

Verificare che l'equazione

$$x^2 - e^y \sin x = 0$$

definisce implicitamente una funzione $x = x(y)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$ e calcolare $x'(0)$.

Esercizio 4.

Calcolare l'integrale (doppio) della funzione $x^2y^2 - 2y + 1$ sulla corona circolare centrata nell'origine e raggi 1 e 3.

Soluzioni

1a.
$$\int_0^1 F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt = 4\int_0^1 t^3\,dt = 1.$$

1b. Osserviamo che $x^2+y^2-4y+4 = x^2+(y-2)^2$. Quindi dominio è $(x,y)\neq(0,2)$. $F=\nabla U$, con $U=\frac{1}{2}\log(x^2+(y-2)^2)+c$.

2a. $x_0\in A$ è minimo relativo se esiste intorno $B(x_0,r)\subset A$, con $r>0$, tale che $f(x_0)\leq f(x)$ per ogni $x\in B(x_0,r)$.

2b. Da Fermat, $\nabla f=(0,0)$ se e solo se
$$\begin{cases} 3x^2+y=0 \\ 3y^2+x=0 \end{cases}$$
e risolvendo il sistema si ha
$$\begin{cases} y=-3x^2 \\ x(27x^3+1)=0 \end{cases}$$
con soluzioni $(x_1,y_1)=(0,0)$ e $(x_2,y_2)=(-1/3,-1/3)$. L'Hessiana H è
$$\begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$
pertanto
$$H(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$
e
$$H(0,0)=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
Il determinante di $H(0,0)$ è negativo, quindi punto di sella. Il determinante di $H(-1/3,-1/3)$ è positivo e l'entrata a_{11} della matrice è negativa. Quindi il punto è di massimo locale.

3. $f(0,0)=0$ e $\nabla f = 2x-e^y\cos x, -e^y\sin x$ con $\nabla f(0,0)=(-1,0)$. $\partial_x f(0,0)\neq 0$, quindi valgono le ipotesi del Dini ed esplicito x in funzione di y, ovvero $x=x(y)$. Si ha che $x(0)=0$, che $f(x(y),y)=0$ in un intorno di $y=0$ e vale $x'(y)=-\frac{\partial_y f}{\partial_x f}$. Quindi $x'(0)=0$.

4. Passando a coordinate polari, ricordando che l'elemento d'area diviene $dxdy=\rho d\rho dt$ si ha
$$\begin{aligned}\iint_\Omega x^2y^2-2y+1\,dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_1^3 (\rho^5\cos^2 t\sin^2 t - 2\rho^2\sin t+\rho)\,d\rho dt \\ &= \frac{1}{4}\int_1^3 \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt + 2\pi\int_1^3 \rho d\rho \\ &= \frac{91}{3}\pi + 8\pi = \frac{115}{3}\pi.\end{aligned}$$
dove abbiamo usato: $\int_0^{2\pi}\sin t\,dt=0$ e $\sin(2t)=2\sin t\cos t$, e con un cambio di variabile
$$\int_0^{2\pi}(\sin(2t))^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\sin^2 x\,dx = \pi.$$